DM de mathématiques n°9 - Correction

Exercice 1 :

On considère l'expression A, dont une écriture est la suivante : $A = (3-2x)^2 - 36$

1) $A = (3-2x)^2 - 36 = 3^2 - 2 \times 3 \times 2x + (2x)^2 - 36 = 9 - 12x + 4x^2 - 36 = 4x^2 - 12x - 27$
2) $A = (3-2x)^2 - 36 = (3-2x)^2 - 6^2 = (3-2x+6)(3-2x-6) = (9-2x)(-3-2x)$
3) D'après la question 1), $A = 4x^2 - 12x - 27$. On remplace donc x par $\sqrt{5}$, on obtient :
$A = 4 \times (\sqrt{5})^2 - 12\sqrt{5} - 27 = 4 \times 5 - 12\sqrt{5} - 27 = -7 - 12\sqrt{5}$
4) Pour résoudre l'équation $A = 0$, on considère l'expression factorisée $(9-2x)(-3-2x)$
Or un produit de facteurs est nul si l'un au moins des facteurs est nul, donc :
$$9 - 2x = 0 \quad \text{Ou} \quad -3 - 2x = 0$$
$$-2x = -9 \quad \text{Ou} \quad -2x = 3$$
$$x = \frac{9}{2} = 4{,}5 \quad \text{Ou} \quad x = -\frac{3}{2} = -1{,}5$$
Les solutions de cette équation sont donc $-1{,}5$ et $4{,}5$

Exercice 2 :

Soit l'expression $B = (5x+2)^2 - (2x+7)(5x+2)$

1) $B = (5x+2)^2 - (2x+7)(5x+2) = (5x)^2 + 2 \times 5x \times 2 + 2^2 - (2x \times 5x + 7 \times 5x + 2x \times 2 + 7 \times 2) = 25x^2 + 20x + 4 - (10x^2 + 35x + 4x + 14) = 25x^2 + 20x + 4 - 10x^2 - 39x - 14 = 15x^2 - 19x - 10$
2) $B = (5x+2)^2 - (2x+7)(5x+2) = (5x+2)(5x+2) - (2x+7)(5x+2)$
$= (5x+2)[(5x+2) - (2x+7)] = (5x+2)(5x+2-2x-7) = (5x+2)(3x-5)$
3) On souhaite résoudre l'équation $(5x+2)(3x-5) = 0$
Or un produit de facteurs est nul si l'un au moins des facteurs est nul, donc :
$$5x + 2 = 0 \quad \text{Ou} \quad 3x - 5 = 0$$
$$5x = -2 \quad \text{Ou} \quad 3x = 5$$
$$x = -\frac{2}{5} = -0{,}4 \quad \text{Ou} \quad x = \frac{5}{3}$$
Les solutions de cette équation sont donc $-0{,}4$ et $\frac{5}{3}$

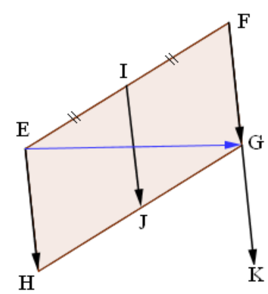
Exercice 3 :

Soit $C = \frac{5}{3} - \frac{7}{3} \times \frac{9}{4}$; $D = \sqrt{45} - 12\sqrt{5}$; $E = 25\sqrt{3} - \sqrt{75} - 5\sqrt{27}$ et $F = \frac{3 \times 10^{21} \times 21 \times 10^{-16}}{7 \times 10^{12}}$

1) $C = \frac{5}{3} - \frac{7}{3} \times \frac{9}{4} = \frac{5}{3} - \frac{7 \times 9}{3 \times 4} = \frac{5}{3} - \frac{63}{12} = \frac{5 \times 4}{3 \times 4} - \frac{63}{12} = \frac{20}{12} - \frac{63}{12} = -\frac{43}{12}$
2) $D = \sqrt{45} - 12\sqrt{5} = \sqrt{9 \times 5} - 12\sqrt{5} = \sqrt{9} \times \sqrt{5} - 12\sqrt{5} = 3\sqrt{5} - 12\sqrt{5} = -9\sqrt{5}$
3) $E = 25\sqrt{3} - \sqrt{75} - 5\sqrt{27} = 25\sqrt{3} - \sqrt{25 \times 3} - 5\sqrt{9 \times 3} = 25\sqrt{3} - \sqrt{25} \times \sqrt{3} - 5 \times \sqrt{9} \times \sqrt{3}$
$= 25\sqrt{3} - 5\sqrt{3} - 15\sqrt{3} = 5\sqrt{3}$
4) $F = \frac{3 \times 10^{21} \times 21 \times 10^{-16}}{7 \times 10^{12}} = \frac{3 \times 21}{7} \times \frac{10^{21} \times 10^{-16}}{10^{12}} = \frac{3 \times 3 \times 7}{7} \times \frac{10^{21-16}}{10^{12}} = 9 \times \frac{10^5}{10^{12}}$
$= 9 \times 10^{5-12} = 9 \times 10^{-7}$

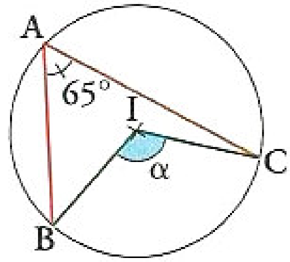
Exercice 4 :

Construire un parallélogramme $EFGH$ et I le milieu de $[EF]$

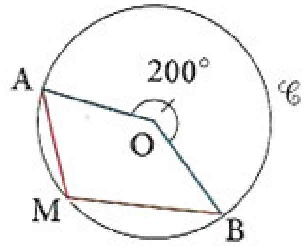


1) Voir ci-contre
2) On considère la translation de vecteur $\overrightarrow{EH}$
a. L'image du point E est le point H
b. L'image du point F est le point G car le EFGH est un parallélogramme donc $\overrightarrow{EH} = \overrightarrow{FG}$
3) Le point J est le milieu du segment $[GH]$ puisqu'il s'agit de l'image du point I milieu du segment $[EF]$ et donc J sera le milieu du segment image, c'est-à-dire $[GH]$
4) Comme le point K est tel que $\overrightarrow{EK} = \overrightarrow{EG} + \overrightarrow{EH}$, mais aussi $\overrightarrow{EK} = \overrightarrow{EG} + \overrightarrow{GK}$ alors $\overrightarrow{EH} = \overrightarrow{GK}$.
Par conséquent le quadrilatère $EGKH$ est un parallélogramme et donc ses diagonales se coupent en leurs milieux. Et puisque J est le milieu de l'une d'entre elles, $[GH]$, alors que J est le milieu de la seconde $[EK]$.

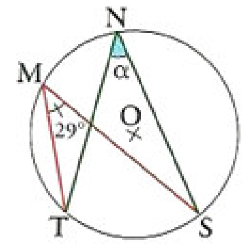
Exercice 5 :
Dans chacun des cas ci-dessous, déterminez la valeur de l'angle demandé. Justifiez



$\widehat{CIB} = ?$



$\widehat{AMB} = ?$



$\widehat{TNS} = ?$

Comme dans un cercle si un angle inscrit et un angle au centre interceptent le même arc, alors la mesure de l'angle au centre est égale au double de celle de l'angle inscrit.

Figure1 : L'angle inscrit $\widehat{BAC}$ et l'angle au centre $\widehat{CIB}$ interceptent le même arc
Donc $\widehat{CIB} = 2 \times \widehat{BAC} = 2 \times 65 = 130°$

Figure2 : L'angle inscrit $\widehat{AMB}$ et l'angle au centre $\widetilde{AOB}$ interceptent le même arc
Donc $\widehat{AMB} = \frac{1}{2} \times \widetilde{Aob} = \frac{1}{2} \times 100 = 50°$

De plus, comme dans un cercle si deux angles inscrits interceptent le même arc, alors ils ont la même mesure

Figure3 : Les angles $\widehat{TMS}$ et $\widehat{TNS}$ sont deux angles inscrits interceptant le même arc, ils ont donc la même mesure. C'est-à-dire $\widehat{TNS} = 29°$

Exercice 6 :
Dans cet exercice, les longueurs sont exprimées en cm. Répondre aux questions en détaillant les calculs.
La relation entre la longueur c du coté d'un carré et la longueur d de sa diagonale est donnée par la formule :

$$d = c\sqrt{2}$$

1) La longueur du côté d'un carré est $\sqrt{8} + \sqrt{2}$.
   a) $d = c\sqrt{2} = \left(\sqrt{8} + \sqrt{2}\right) \times \sqrt{2} = \sqrt{8} \times \sqrt{2} + \sqrt{2} \times \sqrt{2} = \sqrt{16} + \sqrt{4} = 4 + 2 = 6$
   Donc la longueur de sa diagonales est bien un nombre entier ($6\ cm$)

   b) $A = c^2 = \left(\sqrt{8} + \sqrt{2}\right)^2 = \left(\sqrt{8}\right)^2 + 2 \times \sqrt{8} \times \sqrt{2} + \left(\sqrt{2}\right)^2 = 8 + 2\sqrt{16} + 2 = 10 + 2 \times 4 = 18$
   Donc l'aire de ce carré est un nombre entier ($18\ cm^2$)

2) La longueur de la diagonale d'un autre carré est $\sqrt{40}$.
   On utilise de nouveau la formule $d = c\sqrt{2}$ où $d = \sqrt{40}$
   Ainsi, $\sqrt{40} = c\sqrt{2}$ et donc $c = \frac{\sqrt{40}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{20 \times 2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{20} \times \sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \sqrt{20} = \sqrt{4 \times 5} = \sqrt{4} \times \sqrt{5} = 2\sqrt{5}$
   La longueur de son côté est de $2\sqrt{5}\ cm$